



TITLE:

粒子数インバランス下の中性フェルミ超流動体における量子渦の研究

AUTHOR(S):

高橋, 雅裕

CITATION:

高橋, 雅裕. 粒子数インバランス下の中性フェルミ超流動体における量子渦の研究. 物性研究 2007, 88(4): 592-618

ISSUE DATE:

2007-07-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/110847>

RIGHT:

修士論文 (2006年度)

粒子数インバランス下の中性フェルミ超流動体における量子渦の研究

岡山大学大学院自然科学研究科数理物理学専攻

高橋 雅裕[†]

目次

1	序論	593
1.1	<i>Super Clean Cold Atom</i> 系について	593
1.2	フェルミ粒子の凝縮体について	593
1.3	近年の研究	594
1.4	Caroli-de Gennes-Matricon 状態	595
1.5	Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov 状態	597
1.6	動機付け	598
1.7	研究手順	599
2	定式化	599
2.1	Bogoliubov-de Gennes 方程式の導出	599
2.2	物理量の計算	600
3	数値計算	601
3.1	数値計算上の固有値の同一視	601
3.2	量子渦 1 本の系	603
3.3	数式一覧	604
3.4	自己無撞着な方法	605
4	結果・考察	605
4.1	秩序パラメーター (対ポテンシャル)	605
4.2	各成分の粒子密度	606
4.3	粒子数インバランス P 依存性及び結合定数 g 依存性	608
4.4	局所状態密度	609
5	まとめ・展望	613

[†]岡山大学大学院自然科学研究科先端基礎科学専攻, E-mail: masahiro@mp.okayama-u.ac.jp

A	\hat{K} の対称性	614
A.1	時間反転対称性のある系	614
A.2	時間反転対称性の無い系	616

1 序論

1.1 *Super Clean Cold Atom* 系について

今回の研究対象である凝縮した原子気体は不純物のない “*Super Clean System*” と呼ばれる系である。このような系では、不純物による粒子の散乱を考える必要がないため、純粋な物理を議論することが可能である。また、外部磁場を用いた Feshbach 共鳴により粒子間相互作用の大きさを変えることが可能になり、Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) - Bose-Einstein-Condensation (BEC) クロスオーバーといった、ブロードな物理が議論できるようになった [1]。さらには、系の粒子数や、外部ポテンシャルをも自由に変えることができる。この系は、それら多くの操作可能なパラメーターにより、まさに理想的な系と言える。

また、今回考察する系は、中性かつ希薄な原子気体である。中性であることで粒子間相互作用に対して大きく寄与をするクーロン相互作用を考える必要がなく、希薄であることから ^4He などと違い、原子間相互作用が弱く、信頼できる理論を構築することが可能である。

1.2 フェルミ粒子の凝縮体について

近年の実験技術の発達により、 ^6Li や ^{40}K などの中性フェルミ粒子の超流動性が観測され [1]、その系の示す物性に大変関心が持たれている。現在、注目されているポイントの一つは、粒子数をインバランスにした系 — 2 つの超微細スピンを持つ状態の粒子 (擬-アップスピンと擬-ダウンスピン) を準備し、その粒子数比を変えて混合した系 — での、中性フェルミ粒子超流動体の性質である。この系の研究は現在、実験的にも [2–5]、理論的にも [6–8] 盛んに行われている。Zwierlein らは、超流動性の直接の証拠となる量子渦の観測に、粒子数バランスの系だけでなく、粒子数インバランスの系に対しても成功している [2]。量子渦は超流動状態の特徴であり、それを観測することは、系の超流動性を直接に示すことになる。実験的には、この量子渦は粒子密度の濃淡として観測される。

ここで、“量子渦” は秩序パラメーターの特異点で定義される。つまり、秩序パラメーターを $\Psi(r) = |\Psi(r)|e^{i\theta}$ としたとき、原点 $r = 0$ に特異点ができ、この点で秩序パラメーターは 2 次元 (r, θ) 面内でゼロとなる。秩序パラメーターの振幅は、BEC においては、粒子密度 $n(r)$ により、 $|\Psi_{\text{BEC}}(r)| = \sqrt{n(r)}$ で表され、BCS では、Cooper 対の

波動関数により, $\Psi_{\text{BCS}}(r) \propto \langle c_{k\uparrow}^\dagger(r) c_{-k\downarrow}^\dagger(r) \rangle$ と表される[†]. 量子渦中心において, 両系で秩序パラメーターはゼロとなる. BEC ではそれに伴い量子渦中心で粒子密度がゼロになるため, 粒子密度の観測により量子渦の存在を確認することができる [9, 10]. 一方, BCS では, 量子渦の存在に起因した粒子密度低下が生じるとは限らない.

しかしながら, 粒子数のバランスしている系で, 粒子密度の低下として量子渦が観測される. 粒子数のバランスしている系に関して, 超流動状態で量子渦が粒子密度の低下という形で見えるようになる理由は, 量子渦芯近傍で状態が離散化し, その状態がフェルミ準位よりも高エネルギー側にシフトするためである (1.4 節で述べる) [11–18]. そして, この密度低下の度合いは $\sim \Delta_0/E_F$ (Δ_0 は一様系での対ポテンシャルの大きさ, E_F はフェルミエネルギー) で特徴付けられる [11, 12].

本論文では, 粒子数インバランス下で, 量子渦構造がどのように変わるのかを調べることを目的とする. 特に, 粒子数インバランスの状況が, 量子状態の離散化にどのように影響し, その結果, 量子渦芯での粒子密度の低下による量子渦の観測が可能であるか, ということに興味がある.

この研究は, 固体物理など他の分野にも通じる所がある. それは超伝導体において, 一様磁場下でアップスピンとダウンスピンの電子状態がゼーマン分裂するために, それらの粒子数インバランスの系が生成される場合などである. 例として, CeCoIn_5 等の重い電子系では, 高磁場領域において Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 状態の存在が指摘されており [19–22], これは内部で粒子数インバランスが実現されたからだと考えられる. さらに, この粒子数インバランス下の量子渦の研究が, 粒子数インバランスのクォークで構成される回転中性子星の量子渦の研究に生かされるのではないかと期待する [23–25].

1.3 近年の研究

最近, MIT と Rice 大学で独立に, 外部磁場を用いることで 2 つの超微細スピン状態を持つフェルミ原子系を作り, その粒子数比を変化させた系での凝縮体の観測が行われた [2, 5]. さらに, MIT のグループは, レーザーを用いて, 閉じ込めポテンシャルを回転させることにより, 系に角運動量を与え, 量子渦が存在することを観測し, BCS 超流動状態が実現していることを直接に示した [2]. 量子渦に関しては, 超伝導体, 液体ヘリウム ^3He [26], ^4He [27] や中性原子ボーズ凝縮体 [28] 等で研究がなされている.

Zwierlein らは Feshbach 共鳴を用いて, 裸の粒子間相互作用が斥力の領域の BEC-側と, 引力の領域の BCS-側の両方で実験を行った [2]. BEC-側では 2 つのフェルミ粒子が分子ボソンをすることによってボーズ凝縮し, BCS-側では, 弱い引力相互作用により粒子が Cooper 対を形成し凝縮する. 粒子数インバランスの指標 P は,

[†]BCS-BEC クロスオーバーに関して言及すると, BCS, BEC 両極限で上記のように表される秩序パラメーターはクロスオーバー近傍で両秩序パラメーターの混ざったものとなる. そしてこれは断熱的に移行することができる [15, 16].

$P = (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) / (N_{\uparrow} + N_{\downarrow})$ で与えられ, N_{\uparrow} [N_{\downarrow}] は多い方 [少ない方] の全粒子数である. ここで, 粒子数インバランス P が保存量となることに注意する. 通常の磁場下の超伝導体の場合は, 磁場 H を外部パラメーターとして操作し, 実験を行う. よって, 粒子数インバランス P を直接操作することができない. 一方, 今回扱う系では, スピン間の相互作用が十分小さく, スピントリップは起こらないために, 各スピン状態の粒子数が保存される. よって, P が保存量となりインバランスの度合いを特徴付ける.

本研究では, 引力相互作用領域 (BCS-側) のみにしぼり, 粒子が Cooper 対を作って凝縮している場合を考える[†]. Zwierlein らの実験結果を参照する [2: 図 1]. まず, $P = 0$ で BCS 領域において密度低下が起こっている. これは, 強結合領域での観測であるためである ($\sim \Delta_0 / E_F$) [11, 12]. そして, P が大きくなるにつれ, 量子渦が見えなくなることがわかる. 具体的には, $P = 0.32$ では量子渦を確認できるが, $P = 0.48$ では, 確認することができない.

では, $P = 0.48$ では量子渦はそこに “無い” のだろうか? 必ずしも今の場合, そうだとは言えない. 量子渦は, 秩序パラメーターの位相が決まらないために, それがゼロとなったもので定義される. 前節で指摘したように, BCS 領域での秩序パラメーターは粒子密度と直接的な関係を持っていない. よって, 粒子密度低下がないことと, 量子渦が “無い” ことは違う意味を持つ. 量子渦の場所で, 粒子数の低下が起こることについては, 次節で説明する.

1.4 Caroli-de Gennes-Matignon 状態

本研究の先駆けとなる研究はこれまでも多くなされてきた. まず, 量子渦芯内部の準粒子状態に対する先駆的研究は Caroli らによって行われている [29]. また, Gygi, Schluter らは初めて, 2.1 節で導出する Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式の直接の計算で, ここで紹介する Caroli-de Gennes-Matignon (CdGM) 状態を計算した [30]. 中性原子気体の系においても BCS-BEC クロスオーバー領域での研究がなされている [13–18]. Hayashi らにより BCS 側で粒子密度分布において quantum depletion が起こり, 量子渦が粒子密度分布を介して見えるようになることが明らかにされた [11, 12]. これは, 局所状態密度 (Local Density of States: LDOS) を解析することにより理解できる. 準粒子は Cooper 対を作り凝縮し, これによりフェルミ準位を中心にギャップができる. 通常, 絶対零度において準粒子はフェルミ準位以下の状態を占有することになる. ここに量子渦が入る場合を考える. 量子渦中心は, 秩序パラメーターの位相が決まらないために, それが局所的にゼロになった点である [図 1: $r = 0$ の点]. よって, 秩序パラメーター, つまり対ポテンシャルは, 量子渦を中心にした $r < \xi$ の領域で擬井戸型のポテンシャルの穴を作る. ここには, 離散的なエネルギー状態ができる. ここで ξ はコヒーレンス (回復) 長を表し, 図 1 の計算状況では, $\xi \sim d$ である.

[†]本研究で扱う領域は, $-1.4 \leq (k_F a)^{-1} \leq -0.7$. ここで, k_F は Fermi 波数, a は s -波散乱長である.

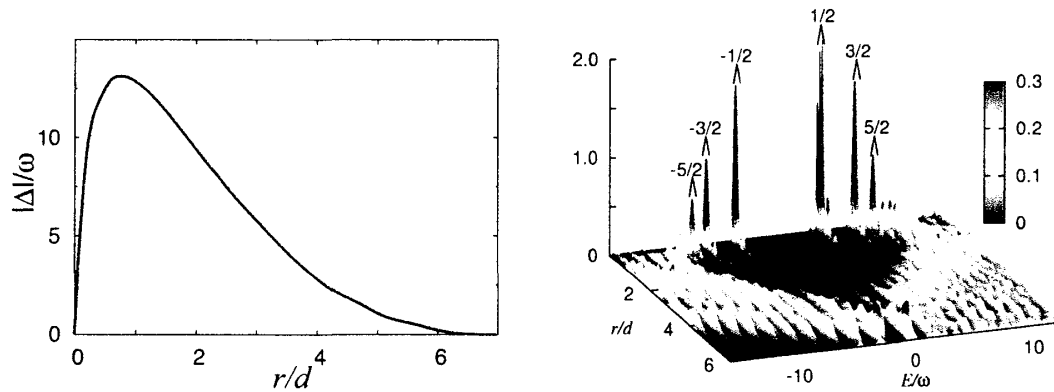


図 1: (左) 秩序パラメーター $\Delta(r)$ の空間依存性と (右) 局所状態密度 $N(r, E) \equiv N_{\uparrow}(r, E) = N_{\downarrow}(r, E)$ [式 (39, 40) 参照]. ここで $d = \sqrt{\hbar/M\omega}$, M は粒子質量, ω はトラップポテンシャル周波数 (以下同様). 共に粒子数バランスの系. ただし, 動径方向に軸対称な調和振動子型のトラップポテンシャル $V(r) \propto r^2$ がある場合. (左) 秩序パラメーターに注目すると, 対ポテンシャルが量子渦中心から系の外側に向かって増加し, 井戸型ポテンシャルに似た形を持つことがわかる. これにより, 量子渦中心に離散的な状態ができる. (右) 局所状態密度中のラベルは角運動量 q_{θ} を示す. これらのラベル付けされた状態を含むギャップ中の束縛状態は CdGM 状態と呼ばれる. $q_{\theta} = 1/2$ の振幅は非常に大きい, 図を見やすくするために上部を省いて描いている.

図 1 (右) に LDOS を示す. フェルミ面 ($E = 0$) を中心に $\pm\Delta(r)$ のエネルギーギャップがあることが見てとれる. また, エネルギーギャップ中に離散的な束縛状態があることがわかる. これらの束縛状態は, Caroli-de Gennes-Matignon (CdGM) 状態と呼ばれる. 注意したいのは, CdGM 状態のうち, 量子渦中心に振幅を持つのは, 角運動量 $q_{\theta} = 1/2$ のピークのみで, これはフェルミ準位の上に位置していることである. ギャップの外側には, extended states と呼ばれる状態がある. 絶対零度において, 準粒子はフェルミ準位の下側の状態を占有するため, $q_{\theta} = 1/2$ のピークは占有されない. これにより, 量子渦中心では粒子密度低下が起こる [図 2]. これは, 粒子密度測定で量子渦の存在を確認することができることを示唆しており, その密度低下は Δ_0/E_F に依存していることが分かっている [11, 12].

次に粒子数インバランスの系で起こると予想されることを述べる. 粒子数インバランスの系ではパウリの排他律のため, フェルミ準位が各スピン状態で違ってくる. 多い方の粒子 (多粒子) の方はフェルミ準位が高くなり, 少ない方の粒子 (少粒子) の方は低くなる. よって多粒子の状態の LDOS に着目すると, 量子渦中心の状態の占有が起こると考えられる. つまり, 量子渦状態では超流動性と“磁化”との共存が可能であり, この結果として, 量子渦での粒子密度低下がなくなり, 量子渦が見えにくくなると考えられる.

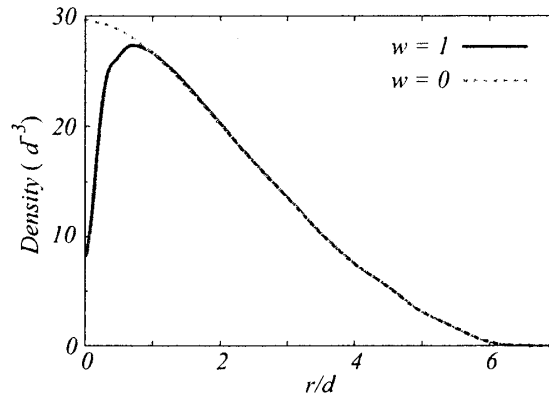


図 2: 量子渦がある場合 (渦度 $w = 1$) と無い場合 ($w = 0$) での粒子数バランスの系の量子渦構造 nd^3 . ただし, 動径方向に軸対称な調和振動子型のトラップポテンシャル $V(r) \propto r^2$ がある場合. 量子渦がある場合, 量子渦中心において, 粒子密度が低下している.

1.5 Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov 状態

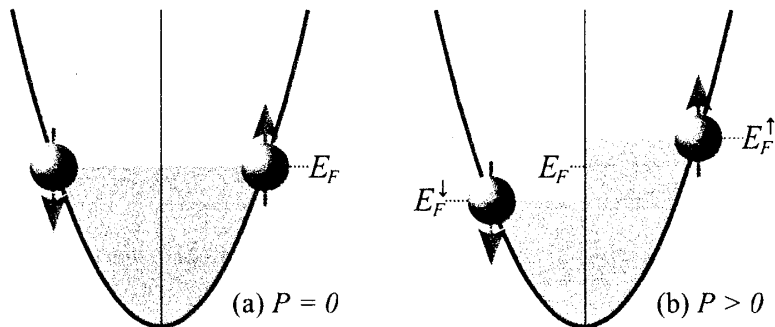


図 3: 粒子数バランスの場合と粒子数インバランスの場合でのフェルミ準位の違い. (a) が $P = 0$ の場合, (b) が $P > 0$ の場合である.

量子渦の可視性とは別に, 粒子数インバランスの系で起こると考えられることはいくつかある. その一つは, 秩序パラメーターが空間変調する Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 状態である [31,32]. フェルミ粒子系では, 排他律のため, 同じ状態を 2 つ以上の粒子が占有することができない. よってフェルミ準位は粒子数によって上下する. 粒子数インバランスの系では, 擬-アップスピンと擬-ダウンスピンの粒子数が異なるため, それぞれのフェルミ準位が異なる [図 3 (b)]. フェルミ準位近傍の準粒子が Cooper 対を形成するが, フェルミ準位が異なるために, 対を作った粒子は重心運動量 $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_F^\uparrow - \mathbf{k}_F^\downarrow$ を有限に持つことになる. このような系において実現する状態として FFLO 状態がある. 一様系では, $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 \cos(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})$ や, $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}$ などがあることが知られている. このように, 系は Cooper 対ポテンシャルを空間変化させることにより, より低いエネルギー状態になることができる.

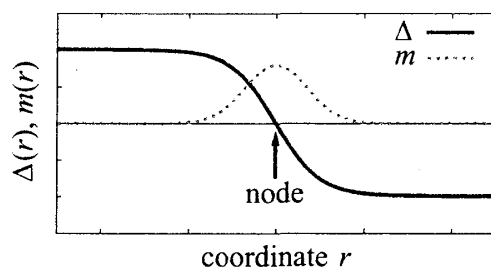


図 4: 秩序パラメーター $\Delta(r)$ (実線) と磁化 $m(r)$ (破線) の空間変化の模式図. 秩序パラメーターがゼロのノードの場所に磁化は集まる傾向にある.

さらに, FFLO 状態が実現することにより, 対ポテンシャルがゼロとなる“ノード”ができる. 粒子数インバランスの系では, 粒子数が等しくないために, 対を作れずに余る粒子 — 超過粒子 — が存在する. これらの粒子は, 対ポテンシャルがゼロとなるノードに集まりやすい. つまり, FFLO 状態もまた超流動と磁化の共存状態である. よって, 超過粒子は, 量子渦中心と, 対ポテンシャルのノードに集まると考えられる.

実際に, 粒子数インバランス下の中性原子超流動体で FFLO の存在が理論的に示されている [6, 7].

1.6 動機付け

これまでに量子渦の研究と, FFLO 状態の研究は別々に行われてきた. しかし, この両方が共存する系についての研究は未だ少ない. 現在, このような系での実験が可能になり, そのような系での超流動性や量子渦構造についての理解が求められる.

秩序パラメーターがゼロとなる量子渦が存在していても, BCS では量子渦中心において粒子数がゼロにはならない. これは粒子数がバランスしていてもそうである. そこで, 粒子数インバランスの系での量子渦はどのような構造をとるのか, 粒子密度低下を介した量子渦の存在は観測されうるのか, このことについて微視的理論より得られる BdG 方程式を用い, 量子渦中心の各粒子密度に注目して解明する.

一方で, Cooper 対を組めずに残った粒子はどこにトラップされるのだろうか? CdGM 状態と FFLO 状態の研究から分かるように, CdGM 状態では, 多粒子の方のフェルミ準位が高エネルギー側にシフトすることから, 量子渦中心に超過粒子がトラップされる. 一方, FFLO 状態ではそのノード, つまり系の周辺部に超過粒子がトラップされる. これら両方のトポロジカル欠陥が存在するとき, そのどちらに超過粒子がトラップされるかということに興味がある. これらのことを解明することがこの研究の目標である.

1.7 研究手順

粒子数インバランス下の中性フェルミ超流動体において、量子渦の可視性 (量子渦芯における粒子密度の低下の有無) を議論する。研究方法は、まず標準的な BCS ハミルトニアンより、平均場近似と Bogoliubov 変換によって、方程式を導出する。BdG 方程式は、秩序状態において、 k_F^{-1} 程度の原子スケールの物理を記述できる強力な方程式である。これを粒子数インバランスの系に量子渦が入った状態で、自己無撞着に解く。得られた固有関数を用いて、秩序パラメーター、粒子密度の空間分布、LDOS を等を計算し、量子渦の可視性について議論する。実際の系に対する考察と、実験への提案をする。

2 定式化

2.1 Bogoliubov-de Gennes 方程式の導出

ここで、平均場近似を用いた微視的理論の標準方程式である Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式を導出する。まず、出発点となる BCS ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \left(\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) K_{\sigma}(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) + g \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right) \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 g は結合定数で、引力相互作用領域のため負の値をとる。ここで、

$$K_{\uparrow,\downarrow}(\mathbf{r}) = -\frac{\nabla^2}{2M} + V(\mathbf{r}) - \mu_{\uparrow,\downarrow} \quad (2)$$

である。 M は粒子の質量、 $V(\mathbf{r})$ は外部ポテンシャルである。ここで、第 2 項を平均場近似で扱い、対ポテンシャルを $\Delta(\mathbf{r})$ 、各粒子密度を $n_{\sigma}(\mathbf{r})$ として、次のようにおく。

$$\Delta(\mathbf{r}) \equiv g \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \quad (3)$$

$$n_{\sigma}(\mathbf{r}) \equiv \langle \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle \quad (4)$$

すると、ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \vec{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{K}(\mathbf{r}) \vec{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

と書くことができる。ここで、

$$\vec{\Psi}(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad \vec{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) & \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\hat{K}(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} K_{\uparrow}(\mathbf{r}) + gn_{\downarrow}(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -K_{\downarrow}^*(\mathbf{r}) - gn_{\uparrow}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

とした.

次に, この南部スピノル $\vec{\Psi}(\mathbf{r})$ に Bogoliubov 変換を施す.

$$\vec{\Psi}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{q}} \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{\mathbf{q},\uparrow} \\ \eta_{\mathbf{q},\downarrow}^{\dagger} \end{bmatrix} \equiv \sum_{\mathbf{q}} \hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \vec{\eta}_{\mathbf{q}} \quad (8)$$

ここで,

$$\hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad \vec{\eta}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \eta_{\mathbf{q},\uparrow} \\ \eta_{\mathbf{q},\downarrow}^{\dagger} \end{bmatrix} \quad (9)$$

とおいた. また, $\eta_{\mathbf{q},\sigma}$ はフェルミオンの反交換関係を満たすとする.

$$\{\eta_{\mathbf{q},\sigma}, \eta_{\mathbf{q}',\sigma'}^{\dagger}\} = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \delta_{\sigma,\sigma'}, \quad (10)$$

$$\{\eta_{\mathbf{q},\sigma}, \eta_{\mathbf{q}',\sigma'}\} = \{\eta_{\mathbf{q},\sigma}^{\dagger}, \eta_{\mathbf{q}',\sigma'}^{\dagger}\} = 0. \quad (11)$$

Bogoliubov 変換によって BdG 行列 \hat{K} が準粒子の基底 $\vec{\eta}_{\mathbf{q}}$ で対角化できるものとする; $\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}}^{(\sigma)} \eta_{\mathbf{q},\sigma}^{\dagger} \eta_{\mathbf{q},\sigma}$, つまり,

$$\int d\mathbf{r} \hat{u}_{\mathbf{q}}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{K}(\mathbf{r}) \hat{u}_{\mathbf{q}'}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} \end{bmatrix} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}. \quad (12)$$

これに, 左から $\hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}')$ をかけて総和 $\sum_{\mathbf{q}}$ をとると $\hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}')$ の完全性 $\sum_{\mathbf{q}} \hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \hat{u}_{\mathbf{q}}^{\dagger}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ より,

$$\hat{K}(\mathbf{r}) \hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

が得られる. これが BdG 方程式であり, 任意の対ポテンシャル $\Delta(\mathbf{r})$, Hartree ポテンシャル $g\rho_{\sigma}$ の下での準粒子状態 $[u, v]$ 及び固有値 E を記述できる.

2.2 物理量の計算

Bogoliubov 変換によって各物理量は以下のように書き表せる.
対ポテンシャルは, 式 (3) より,

$$\Delta(\mathbf{r}) = g \sum_{\mathbf{q}} \left\{ v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) f(E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}) - u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) f(-E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}) \right\}, \quad (14)$$

同じく、各スピン成分の粒子密度分布は、式 (4) より、

$$n_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \left\{ |u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 f(E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}) + |v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 f(-E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}) \right\}, \quad (15)$$

$$n_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \left\{ |v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 (1 - f(E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)})) + |u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 (1 - f(-E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)})) \right\}. \quad (16)$$

ここで、 $\langle \eta_{\mathbf{q},\uparrow}^{\dagger} \eta_{\mathbf{q}',\uparrow} \rangle = f(E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}) \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}$, $\langle \eta_{\mathbf{q},\downarrow}^{\dagger} \eta_{\mathbf{q}',\downarrow} \rangle = f(-E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}) \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}$, $\langle \eta_{\mathbf{q},\downarrow} \eta_{\mathbf{q}',\uparrow} \rangle = \langle \eta_{\mathbf{q},\uparrow}^{\dagger} \eta_{\mathbf{q}',\downarrow}^{\dagger} \rangle = 0$ を用いた ($f(E)$ はフェルミ分布関数)。

なお、ギャップ方程式 (14) の扱いには注意が必要である。極低温原子間の相互作用は s-波散乱長 a を用いた接触型の相互作用で記述される; $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. この接触型相互作用により対ポテンシャルは紫外発散を生じるが、ここでは Bulgac-Yu [14] の方法に従ってギャップ方程式 (14) の裸の相互作用定数 g を繰り込まれた定数

$$\frac{1}{g_{\text{eff}}(\mathbf{r})} = \frac{1}{g} + \frac{M k_c(\mathbf{r})}{2\pi^2} \left[1 - \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_c(\mathbf{r})} \ln \frac{k_c(\mathbf{r}) + k_F(\mathbf{r})}{k_c(\mathbf{r}) - k_F(\mathbf{r})} \right] \quad (17)$$

に置き換えることでその発散を取り除く。ここで、 $k_F(\mathbf{r})$ 及び $k_c(\mathbf{r})$ はそれぞれ局所状態近似 (LDA) を用いて得られる局所的なフェルミ波数及びカットオフ波数を表す。各々の具体的な表式は、

$$E_F(\mathbf{r}) \equiv \frac{k_F^2(\mathbf{r})}{2M} = \mu - V(\mathbf{r}) - g\bar{\rho}(\mathbf{r}), \quad (18)$$

$$E_c(\mathbf{r}) \equiv \frac{k_c^2(\mathbf{r})}{2M} + V(\mathbf{r}) + g\bar{\rho}(\mathbf{r}) - \mu \quad (19)$$

で与えられる。ここで、 $\bar{\rho}(\mathbf{r}) \equiv (\rho_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \rho_{\downarrow}(\mathbf{r}))/2$.

3 数値計算

3.1 数値計算上の固有値の同一視

数値計算で行うことは、 $\hat{K}(\mathbf{r})$ の対角化である。 $\hat{K}(\mathbf{r})$ は 2×2 の行列なので[†]、前節で見たように、固有値は 2 つ得られる ($E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}$, $-E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}$). しかし、数値計算上どちらの固有値が $E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}$ で、どちらの固有値が $-E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}$ という区別はつかない。計算式の上では、ホールと粒子を区別して書くが、数値計算では同等に扱う。固有値を区別できないので、以下のように書き直す。

[†]3.4 節で述べるように、波動関数を動径方向に差分化することにより計算を行うため、分割数を N とし、 $2N \times 2N$ の行列を対角化する。

$$\vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

↓ 変化なし

↓ 変化

$$\vec{\varphi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

$$E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} \longrightarrow E_{\mathbf{q}}, \quad -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} \longrightarrow E_{\mathbf{q}}$$

よって、2つの式で構成されていた Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式 (13) は、一つの方程式:

$$\hat{K}(\mathbf{r})\vec{\varphi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{q}}\vec{\varphi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \quad (20)$$

となる。この書き換えにより各物理量は以下になる。

式 (14) の $\Delta(\mathbf{r})$ は、

$$\Delta(\mathbf{r}) = g_{\text{eff}} \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) f(E_{\mathbf{q}}). \quad (21)$$

式 (15) より、 $n_{\uparrow}(\mathbf{r})$ は、

$$n_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} |u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 f(E_{\mathbf{q}}). \quad (22)$$

式 (16) より、 $n_{\downarrow}(\mathbf{r})$ は、

$$n_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} |v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 (1 - f(E_{\mathbf{q}})). \quad (23)$$

ここで総和は全ての固有状態について行うことに注意する。1つの \mathbf{q} に対して、2つの固有値が存在しており、これまでそれを別々に区別して計算していたが、数値計算では区別できないので、同じ \mathbf{q} の総和であるが、異なる固有状態としてとる[†]。

無次元化を行い変数の値を数値計算で扱いやすくする。以下のスケーリングパラメーターを用いる。

$$\begin{cases} \text{Energy} & : \quad \omega \equiv \omega_r \quad (\hbar = 1) \\ \text{Length} & : \quad d \equiv \sqrt{1/M\omega} \end{cases} \quad (24)$$

[†]系の時間反転対称性がある場合、 $E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} = E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}$ となるので、総和は半分で値を2倍すればよい。ただし、粒子数インバランスの系では時間反転対称性が破れている。[付録 A]。

ここで, M は粒子の質量, ω_r は動径方向のトラップポテンシャルの振動数である. これより, $K_\sigma(\mathbf{r})$ は,

$$K_\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}(r^2 + \gamma^2 z^2) - \mu_\sigma. \quad (25)$$

無次元化する前のトラップポテンシャル $V(\mathbf{r})$ を以下のシリンダー型:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M\omega_r^2(r^2 + \gamma^2 z^2), \quad \gamma \equiv \omega_z/\omega_r \quad (26)$$

とした.

3.2 量子渦 1 本の系

トラップポテンシャル $V(\mathbf{r})$ の形や, 系への角運動量の挿入の仕方により, 量子渦のでき方はさまざま考えられる. 今回は軸対称性を持つシリンダー型のトラップポテンシャルを仮定する. 系が軸対称性を持つため, 円筒座標系 $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$ で考えるのが妥当である. さらに $\gamma \ll 1$ とすることによって, z 軸方向は一様であるとする[†].

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(r^2 + \gamma^2 z^2) \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2}r^2 \quad (27)$$

z 軸方向には周期境界条件を用いると, 固有関数 $u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ は,

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) &= u_{\mathbf{q}}(r, \theta) e^{iq_z z}, \\ q_z &= (2\pi/L)n_z. \quad (n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (28)$$

ここで L は z 軸方向の系の長さである. 軸対称性より, z 軸まわりの任意回転に対して, 系是不変であるので,

$$u_{\mathbf{q}}(r, \theta) = u_{\mathbf{q}}(r) e^{iq_\theta \theta}. \quad (q_\theta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (29)$$

ここで, 量子渦を陽に考え,

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(r) e^{-iw\theta} \quad (30)$$

とすると, 式 (21) より, $\Delta(\mathbf{r}) = g_{\text{eff}} \sum_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) f(E_{\mathbf{q}})$ より, $v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ の位相 q'_θ は,

$$q'_\theta = q_\theta + w \quad (31)$$

となり, 固有関数 $v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ は,

$$v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = v_{\mathbf{q}}(r) e^{i(q_\theta + w)\theta} e^{iq_z z} \quad (32)$$

[†]Zwierlein らの実験では $\gamma \sim 0.12$ [2].

となる. ここで $\Delta(\mathbf{r})$ は z 軸方向には位相がキャンセルし一定となる. 今, 渦度 $w = 1$ の場合を考えると, 固有関数はそれぞれ以下で表せられる.

$$\begin{cases} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{q}}(r) e^{i(q_\theta - \frac{1}{2})\theta} e^{iq_z z} \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = v_{\mathbf{q}}(r) e^{i(q_\theta + \frac{1}{2})\theta} e^{iq_z z} \end{cases} \quad (33)$$

3.3 数式一覧

導いた数式をしておく.

BdG 方程式は, 式 (20) より,

$$\begin{bmatrix} K_{\uparrow}(\mathbf{r}) + gn_{\uparrow}(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -K_{\downarrow}^*(\mathbf{r}) - gn_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

式 (27) より, シリンダー型のトラップポテンシャルを仮定して,

$$K_{\sigma}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \mu_{\sigma} \quad (35)$$

式 (21) より,

$$\Delta(\mathbf{r}) = g_{\text{eff}} \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) f(E_{\mathbf{q}}). \quad (36)$$

式 (22), (23) より,

$$n_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} |u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 f(E_{\mathbf{q}}), \quad (37)$$

$$n_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} |v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 (1 - f(E_{\mathbf{q}})). \quad (38)$$

さらに, 任意のエネルギー E , 場所 \mathbf{r} での局所状態密度 (Local Density of States: LDOS) は,

$$N_{\uparrow}(\mathbf{r}, E) = \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} |u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 \delta(E - E_{\mathbf{q}}), \quad (39)$$

$$N_{\downarrow}(\mathbf{r}, E) = \sum_{\mathbf{q}: \text{all eigenstates}} |v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})|^2 \delta(E - E_{\mathbf{q}}). \quad (40)$$

3.4 自己無撞着な方法

実際の数値計算で行う自己無撞着な手順:

1. 式 (7) の $\hat{K}(\mathbf{r})$ を対角化して固有値を求める
2. 対角化に用いたユニタリ行列の列である固有ベクトルを得る
3. 固有ベクトルを用いてギャップ関数 $\Delta(\mathbf{r})$, 粒子密度 $n_\sigma(\mathbf{r})$ などを通き, 新たな $\hat{K}(\mathbf{r})$ を導く
4. 全粒子数 $N = \int d\mathbf{r} \sum_\sigma n_\sigma(\mathbf{r})$ が保存するように μ を変化させる
5. また 1 へ戻り繰り返す
6. 式 (36) のギャップ関数 $\Delta(\mathbf{r})$, 式 (37), (38) の粒子密度 $n_\sigma(\mathbf{r})$ が変化しなくなれば解とする

注意:

定式化の上では, 固有値 $E_{\mathbf{q}}^{(1)}$, 固有関数 $[u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})]^T$; 固有値 $-E_{\mathbf{q}}^{(1)}$, 固有関数 $[-v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r})u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r})]^T$ は区別して書かれるが, いずれも同じ行列 $\hat{K}(\mathbf{r})$ の固有状態なので数値計算上, 固有値の区別は行えない. よって, 数値計算上ではこの準粒子とホールとの固有値, 固有ベクトルを同等に扱う.

本研究では軸対称性のあるシリンダー型の系を想定する. 動径方向は調和振動子型のトラップポテンシャルにより束縛し, z 方向には無限系を想定し, 周期境界条件を用いる. BCS 領域での裸の結合定数として, $-1.5 \leq g \leq -1.1$ ($-0.7 \geq (k_F a)^{-1} \geq -1.4$ に対応), 粒子数インバランス $0 \leq P \leq 0.53$, エネルギーカットオフ $E_C = \pm 200\omega$, 計算する系の半径 $R = 15d$ (境界条件として, $u(r = R) = v(r = R) = 0$), 全粒子数 $N = 3000$ を用いた.

BdG 行列 $\hat{K}(\mathbf{r})$ の対角化では, 波動関数を動径方向に差分化することにより, 帯行列をつくり, ARPACK ライブラリー中の Lanczos/Arnoldi のアルゴリズム [33] を用いて, 計算の高速化を行った.

4 結果・考察

4.1 秩序パラメーター (対ポテンシャル)

まずは秩序パラメーター, つまり対ポテンシャルの空間変化について得られた結果を示す. 図 5 中の (1) は粒子数インバランス $P = 0.3$ で量子渦がある場合, (2) [(3)] は粒子数が等しく量子渦がある [無い] 場合, 挿入図は (1) の対数プロットを表している. ここで, r はトラップポテンシャル中心を原点とし, 動径方向の位置である. 量子

渦はトラップポテンシャル中心に位置しており, (1) 及び (2) の秩序パラメーターが原点でゼロになっていることより確認できる. まず, (1) 粒子数インバランスな系の秩序パラメーターよりわかるように, 粒子数インバランスの系において, 秩序パラメーターは振動しており, $r \geq 3$ でノードを持っていることがわかる. これは, (2) 粒子数バランス $P = 0$ の場合には見られなかったものであり, (1) 粒子数インバランス $P \neq 0$ により現れた現象である. つまり, トラップポテンシャルによる寄与でないことは明らかで, Cooper 対が重心運動量を持つために, 秩序パラメーターが空間変調したものと考えることができ, 系が Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 状態になっていることを示す [34]. さらに図中の (2) 粒子数が等しく量子渦を含む状態, (3) 粒子数が等しく量子渦を含まない状態と比較すると, それらの秩序パラメーターが $r \simeq 7d$ まで存在しているが, 粒子数インバランスの系においても同様に秩序パラメーターが系の端まで存在していることが, 挿入図よりわかる. つまり超流動成分が, 粒子数インバランス下においても系全体にあることを示し, よって系全体が超流動状態にあることを示す. これは, 磁性 (粒子数インバランスによって常磁性対破壊が起こり磁化が発生する) と超流動状態の共存が起こるという FFLO 状態での特徴を示す.

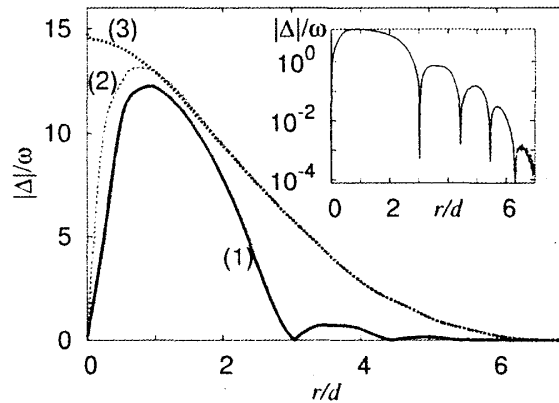


図 5: 秩序パラメーター $\Delta(r)$ の空間変化. $g = -1.5$. (1) は粒子数インバランス $P = 0.3$ で量子渦がある場合. (2) [(3)] は粒子数が等しく量子渦がある [無い] 場合. 挿入図は (1) の対数プロット.

4.2 各成分の粒子密度

次に各成分の粒子密度に注目する. 図 6 (a) [(b)] に粒子数がバランス [インバランス] しているときの各粒子密度の空間変化を示す.

まず, トラップポテンシャル中心に着目する. 粒子数が等しいときに比べて, 粒子数インバランスの系では, アップスピン粒子密度 $n_{\uparrow}(r)$ が上昇しており, それにより全粒子密度 $n(r)$ がその分上昇している. ダウンスピン粒子密度 $n_{\downarrow}(r)$ はさほど変化し

ていない. それどころか, 量子渦が少し広がっている. これによりダウンスピン粒子密度に注目すると粒子密度低下による量子渦が見えることがわかる (4.4 節で詳しく述べる). しかしながら総合的に, アップスピン粒子の密度上昇により, 粒子数バランスの系で見られていた粒子密度低下による量子渦は見えにくくなっていることがわかる. また, アップスピン粒子密度とダウンスピン粒子密度に差ができることにより, 磁化 $m(r)$ が中心で隆起する.

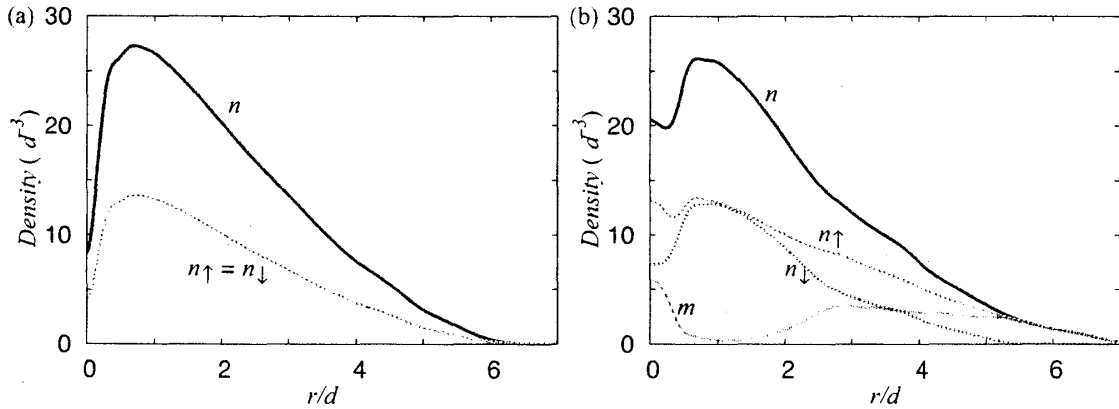


図 6: (a) 粒子数バランスのとき ($P=0$) と (b) 粒子数インバランスのとき ($P=0.3$) の各粒子密度の空間分布. $g = -1.5$. $n_{\uparrow}(r)$ がアップスピン粒子密度, $n_{\downarrow}(r)$ がダウンスピン粒子密度, $n(r) = n_{\uparrow}(r) + n_{\downarrow}(r)$ が全粒子密度, $m(r) \equiv n_{\uparrow}(r) - n_{\downarrow}(r)$ がその差である磁化である. 粒子数バランスの系では $n_{\uparrow}(r) = n_{\downarrow}(r)$ となっており, 磁化 $m(r)$ は発生しない. 一方, インバランスの系では, 磁化 $m(r)$ の絶対量は保存される. アップスピン粒子密度がトラップポテンシャル中心と秩序パラメーターのノードで誘起され磁化が溜まっている.

次に, 粒子数インバランスの系における, 秩序パラメーターのノードの位置 $r \geq 3d$ での各粒子密度に注目する. 粒子数インバランスの系において, 秩序パラメーターはノードを持つ. 図 5 の (1) を見ると, $P=0.3$ において, $r \simeq 3d$ あたりにノードを持っていることがわかる. この点における各粒子密度の違いを図 6 (b) で見ると, アップスピン粒子密度が多く, ダウンスピン粒子密度が少なくなっていることがわかる. これにより, 磁化がノード付近に多く溜まっている. その外側は, 秩序パラメーターの振幅があまり回復しないため, 引き続き磁化が溜まる傾向にある. これらのことは, 秩序パラメーター, つまり, 対ポテンシャルが小さく磁化が存在してもエネルギーの損が秩序パラメーターの大きい所に比べて少ないためだと考えられる.

最後に, 秩序パラメーターの最も成長している所 $r \simeq d$ に着目する. ここでは, これまでと違い, アップスピン粒子密度が抑制され, ダウンスピン粒子密度が誘起されている. これは, アップスピン粒子密度とダウンスピン粒子密度を等しくすることにより, Cooper 対を多く形成して, つまり秩序パラメーターを大きくして, 凝縮によるエネルギーの利得を得ようとするために起こる. これは, これまでの FFLO 状態の研究

によって, "bimodality" と呼ばれる現象である [6].

粒子密度の観測方法の一つに, TOF (Time of Flight) と呼ばれる方法がある. これは, 観測時に系のトラップを解放し, 拡散する原子気体にレーザーを照射するものである. 粒子はレーザーの光を吸収するため, レーザー光の透過性を見ることで, 粒子密度の濃淡を観測することができる. また, 拡散させる過程で磁場勾配をかけると, 各成分を分裂させることができ, 各々の成分を観測することができる. 実験で観測される粒子密度の濃淡を図 7 に再現した.

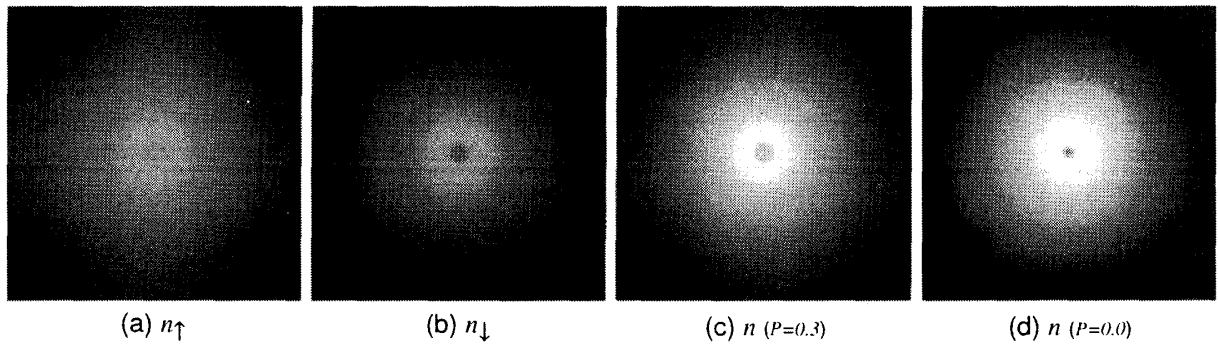


図 7: 各粒子密度の密度マップ. 粒子数インバランスの系 ($P = 0.3$) での (a) アップスピン粒子密度 $n_{\uparrow}(r)$, (b) ダウンスピン粒子密度 $n_{\downarrow}(r)$, (c) 全粒子密度 $n(r)$ と (d) 粒子数バランス系 ($P = 0.0$) での全粒子密度 $n(r)$ の粒子密度マップ.

まず, (a) アップスピン粒子密度 $n_{\uparrow}(r)$ と (b) ダウンスピン粒子密度 $n_{\downarrow}(r)$ を比較すると, アップスピン粒子密度が量子渦中心で誘起されているため, 量子渦を確かめることはほとんどできない. しかしながら, ダウンスピン粒子密度は量子渦中心で低下しているため, 量子渦を確かめることができる. この影響を受けて, (c) 粒子数インバランス下での全粒子密度 $n(r)(P = 0.3)$ は (d) 粒子数バランス下の全粒子密度 $n(r)(P = 0)$ と比べて量子渦が見えにくくなっていることがわかる.

4.3 粒子数インバランス P 依存性及び結合定数 g 依存性

図 8 (a) は全粒子密度の空間変化の粒子数インバランス P 依存性を示す. これは, $P = 0.3$ で見たように, P が大きくなるにつれ, 主にアップスピン粒子密度が量子渦中心で上昇することから, 量子渦が見えにくくなることを示している.

図 8 (b) は各結合定数 g に対する, 量子渦中心での全粒子密度充填率 F の粒子数インバランス P 依存性を示す. 粒子数インバランス P が大きくなるにつれて, 量子渦中心が埋まることは, 図 8 (a) より見ることができる. ここで, 充填率 $F \equiv n(0)/n_{\max}$ ($n(0)$ はトラップポテンシャル中心での全粒子密度, n_{\max} は全粒子密度の一番大きな値) を定義すると, 各 g についての P 依存性が図 8 (b) のように表される. $|g|$ が大きくなるにつれて, つまり強結合になるにつれて, 量子渦中心では大きく粒子密度低下が

起こっている. また P が大きくなるにつれ, 量子渦中心の埋まり方は階段的になっている. この理由は 4.4 節で説明する.

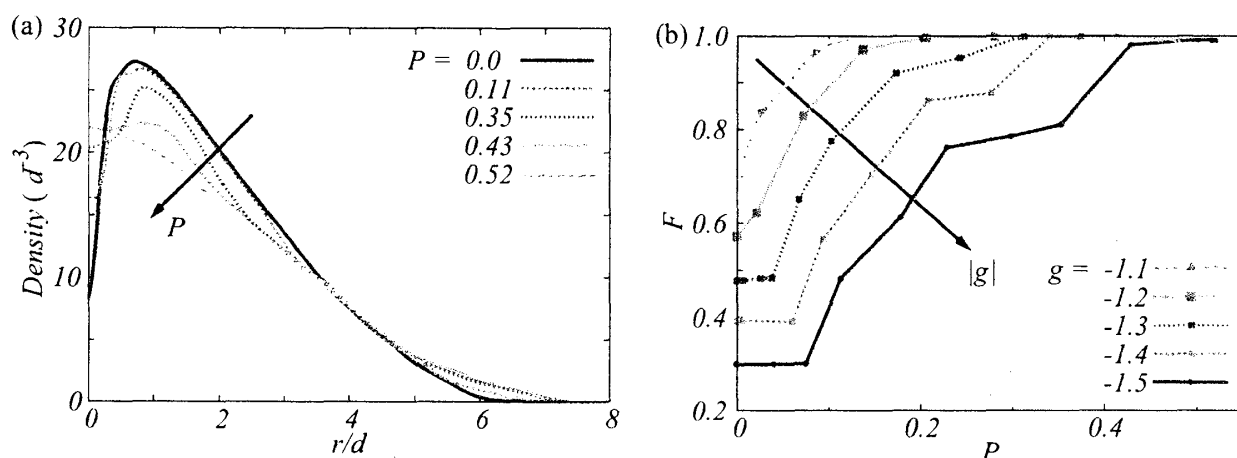


図 8: (a) 全粒子密度 $n(r)$ の空間変化の粒子数インバランス P 依存性と (b) 充填率 $F \equiv n(0)/n_{\max}$ を $n(0)$ (トラップポテンシャル中心での全粒子密度) と, n_{\max} (全粒子密度の一番大きな値) の比としてその P 依存性を調べたもの. (a) において, P が大きくなるにつれ, 量子渦中心の粒子密度が相対的に大きくなっている. (b) において, 完全に粒子密度の低下がなくなったときに $F = 1.0$ となる. $|g|$ が大きくなるにつれて, つまり強結合になるにつれて, 量子渦中心では大きく粒子密度低下が起こっている. また P が大きくなるにつれ, 量子渦中心の埋まり方は階段的になっている.

4.4 局所状態密度

今までの結果を局所状態密度 (Local Density of States: LDOS) を見ることによって詳細に理解する. 図 9 に粒子数バランスのときの LDOS と, 図 10, 11 に粒子数インバランスのときの LDOS (アップスピン粒子とダウンスピン粒子のもの) を示した. またそれぞれの二次元平面図 (b) には秩序パラメーター $\pm|\Delta(r)|$ が上から描かれている. これらの LDOS から一般的にわかることは, エネルギーレベルがゼロ, つまりフェルミエネルギー E_F の付近で, Cooper 対の生成により, エネルギーギャップができて状態がなくなっていることである. また, 三次元の図 (a) の, 系の端, 低エネルギー領域でも状態がなくなっていることがわかる. これは, トラップポテンシャルによって, $V(r) = \frac{1}{2}r^2 - \mu$ ($\mu \sim 20.5\omega$) が存在しているために, あるエネルギー E では, $r \sim \sqrt{2(E + \mu)}$ (回帰点と呼ぶ) 以内にしか粒子が存在することができないことを示す. さらに, 状態は波打っており, 離散的に存在する. 秩序パラメーター $\Delta(r)$ と回帰点の間の領域では, エネルギー $\hbar\omega$ の幅で存在する状態の離散化が起きている. これは, 対ポテンシャル $\Delta(r)$ とトラップポテンシャル $V(r)$ による量子井戸的なポテンシャルの谷が存在するためである (系の表面付近で秩序パラメーター $\Delta(r)$ は小さく

なっているので, 主にトラップポテンシャルの形状がこのエネルギーの離散化の度合いを決定付ける).

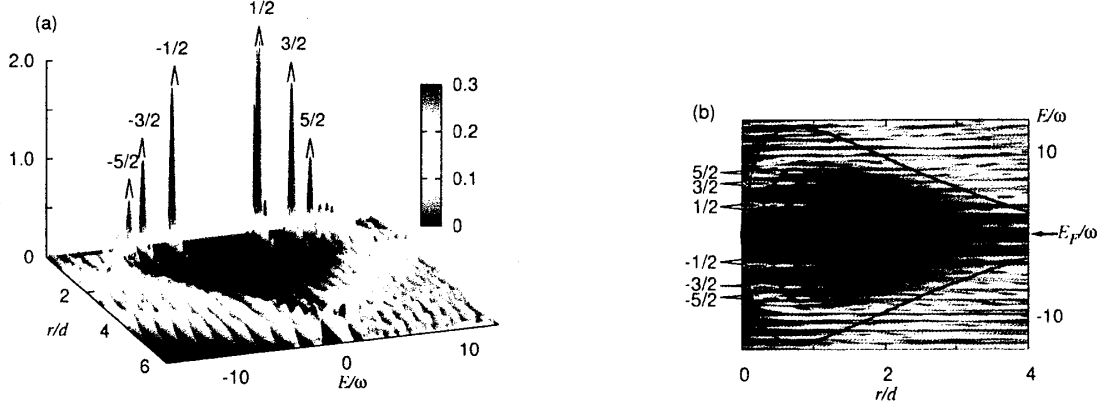


図 9: 粒子数バランス ($P = 0.0$) での局所状態密度 $N(r, E) \equiv N_{\uparrow}(r, E) = N_{\downarrow}(r, E)$. $g = -1.5$. ラベルは, それぞれの CdGM 状態の角運動量 q_{θ} を示す. (a) は三次元で描かれている. (b) は二次元で上から描いており, 秩序パラメーター $\pm|\Delta(r)|$ も重ねて描いている (実線). E_F/ω はフェルミ準位の位置を示す. (a) において, $q_{\theta} = 1/2$ の振幅は非常に大きい, 図を見やすくするために上部が省かれていることに注意する.

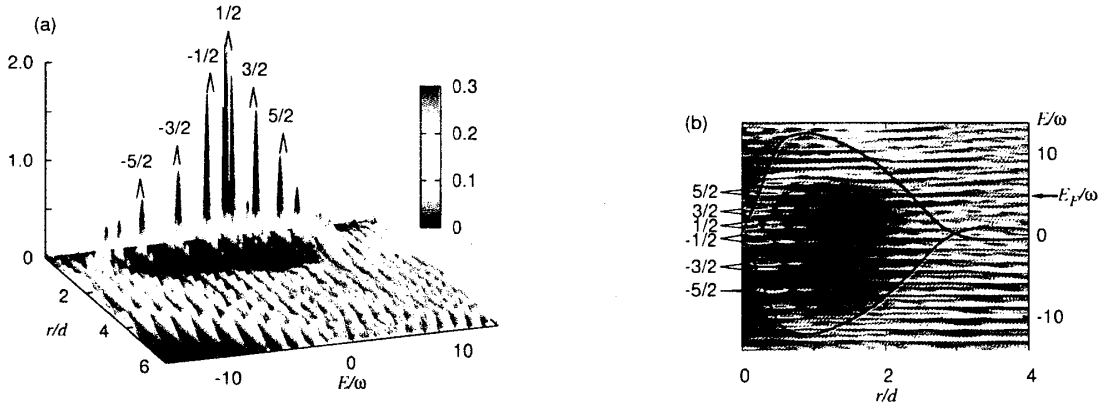


図 10: 粒子数インバランス ($P = 0.3$) でのアップスピンの局所状態密度 $N_{\uparrow}(r, E)$. $g = -1.5$. ラベルは, それぞれの CdGM 状態の角運動量 q_{θ} を示す. (a) は三次元で描かれている. (b) は二次元で上から描いており, 秩序パラメーター $\pm|\Delta(r)|$ も重ねて描いている (実線). E_F/ω はフェルミ準位の位置を示す. (a) において, $q_{\theta} = 1/2$ の振幅は非常に大きい, 図を見やすくするために上部が省かれていることに注意する.

以下, 粒子数インバランスの系について, 粒子数バランスの系の LDOS と粒子数インバランスの系の LDOS を比較しながら考察を行う. 量子渦中心にアップスピン粒

子がトラップされる理由を考える。これは、フェルミ準位 E_F/ω が粒子数インバランスになることにより、高エネルギー側にシフトするためである。これにより、元々非占有だった量子渦中心の状態が絶対零度においても占有されることになる。これにより、量子渦中心の粒子密度が上昇し、量子渦は見えにくくなる。逆にダウンスピン粒子の方はフェルミ準位が低エネルギー側にシフトするため、量子渦中心の占有は起こらない。それどころか、元々占有されていた、量子渦中心に近い場所にある状態の占有がなくなり、量子渦の半径が広がることが分かる。これにより P が大きくなっても、量子渦は見えやすい。

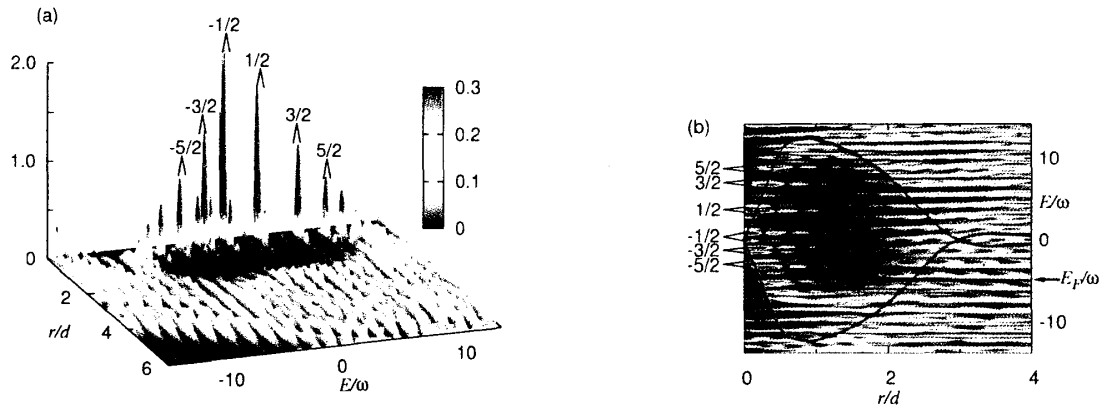


図 11: 粒子数インバランス ($P = 0.3$) でのダウンスピンの局所状態密度 $N_l(r, E)$. $g = -1.5$. ラベルは、それぞれの CdGM 状態の角運動量 q_θ を示す。(a) は三次元で描かれている。(b) は二次元で上から描いており、秩序パラメーター $\pm|\Delta(r)|$ も重ねて描いている (実線). E_F/ω はフェルミ準位の位置を示す。(a) において、 $q_\theta = 1/2$ の振幅は非常に大きいので、図を見やすくするために上部が省かれていることに注意する。

次に注目すべきことは、状態密度のピークがそれぞれ大小の 2 つピークになっていることである。これは、系の有限性に起因している。このダブルピークは、粒子数バランスの系でも粒子数インバランスの系でも起こっているが、粒子数インバランスの系でその振幅が大きい。これらの系と一様系の違いは、外部ポテンシャルの有無による、対ポテンシャルの形状によるものである。これより、考えられることは、外部ポテンシャルの影響により、系の外側で対ポテンシャルがなくなるために、エネルギーギャップが閉じ、そこに低励起状態ができることである。もし、このエネルギー的に等間隔にできた状態のエネルギーと、量子渦中心にできた離散的なエネルギー準位のエネルギーが近ければ、共鳴を起こす。つまり、波動関数が対ポテンシャルの壁を越えてしみ出す効果を生む。粒子数インバランスの系でこの現象がより顕著に現れるのは、系が FFLO 状態をとり、対ポテンシャルが空間的に変動し、系のより内側にノードを持つため、低励起表面状態がより内側にシフトすることによると考えられる。粒子は、量子渦中心の状態をとることにより、トラップポテンシャルからのエネルギーの獲得を免れるこ

とができると考えられ、より内側に存在しようとする傾向がある。これにより、量子渦中心に、よりアップスピン粒子が存在し、このことが量子渦をより見えにくいものとする。

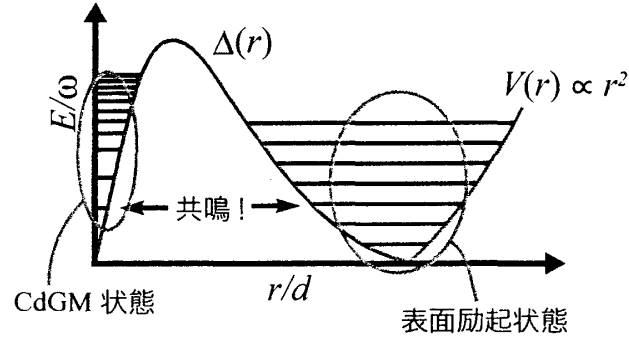


図 12: 対ポテンシャルとトラップポテンシャルによりできる、離散的な CdGM 状態と表面励起状態の概念図

このことは、Caroli-de Gennes-Matricon (CdGM) 状態を波動関数がどのように占有しているかを見ればわかる。図 13 を見ると、低エネルギー側の波動関数 (b) は高エネルギー側の波動関数 (a) より量子渦中心に振幅を持つ。つまり、(b) の状態が元々の CdGM 状態にある状態密度で、(a) は FFLO 状態より染み出してきた状態と考えられる。逆に (a) は (b) に比べて系の外側に大きな振幅を持つ。ここで、系の外側の振幅について、量子渦中心の振幅と比べてかなり小さいように見えるが、これは円筒座標を考慮すると納得できる。系の外側では、円周が長くなるため、体積で考えると大きな寄与を与える。

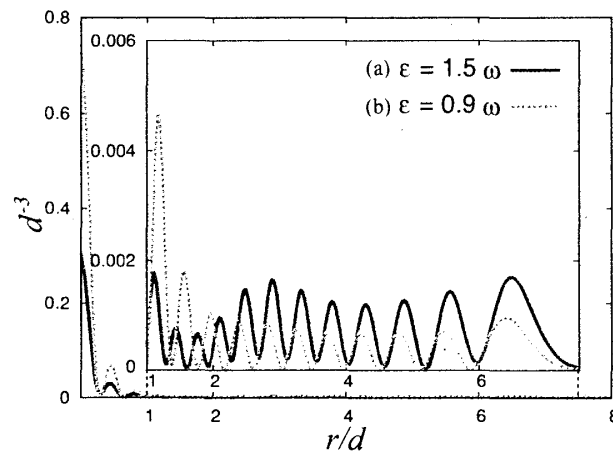


図 13: 固有値 $E = (a)1.5\omega, (b)0.9\omega$ を持つ状態の波動関数 $|u(r)|^2$. 挿入図は $r \geq d$ の領域を拡大したもの。

5 まとめ・展望

Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式を用いて、微視的理論の立場から量子渦の可視性に着目し、粒子数インバランスの中性アルカリ原子気体の系について、その超流動性を研究した。秩序パラメーターに着目すると、振動しながら系の端まで有限の値を持ち存在することが分かった。これは系が Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 状態にあることを示し、磁化と共存しながら系全体が超流動状態であることを示している。粒子数インバランスの系では、量子渦が超過粒子により占有され、粒子密度が上昇し、量子渦が見えにくくなることがわかった。このことは、局所状態密度 (Local Density of States: LDOS) を見ることにより理解できる。特に、量子渦中心での束縛状態が 2 つのピークを持つことは、量子渦中心での粒子密度の増加を促進している。この 2 つのピークは、Caroli-de Gennes-Matricon (CdGM) 状態と表面状態という 2 つの低エネルギー準粒子状態の共鳴により起こっており、秩序パラメーターがノードを持つ FFLO 状態において、それはより顕著となることが分かった。一方で、超過粒子のない、粒子数が少ない方の状態を見ると、量子渦中心の占有が起こらないため、量子渦が見えやすいことが同時にわかった。よって、粒子数インバランスの系において量子渦を観測する場合、少ない方の状態の粒子密度の観測をする必要がある。さらに、実際の量子渦が格子を組む状態について考察する。このような系では、この研究で分かったように、系の外側は超過粒子が占有することから、粒子数インバランス P が大きい状態と似た状態になると考えられる。これにより、系の外側では量子渦が見えにくくなる考える [35]。これらの考察を確かめるためには、系の粒子密度を直接観測する “*in situ*” の方法で、精度よく観測する必要がある。

謝辞

本研究を行うにあたり、ご助言をいただきました町田一成教授に心から感謝いたします。お忙しい中、議論の時間をさいていただき、的確な研究の方向付けをしていただきました。

本研究の根幹となるプログラムをいただいた水島健助手に深く感謝いたします。水島健助手には特に、研究に関してのアドバイスや、日常の勉強に出てくる疑問への回答など、普段からいつも丁寧に答えていただき、大変感謝しています。

また、市岡優典助教授をはじめ、中井宣之博士、Sankalpa Ghosh 博士、安立裕人博士、林伸彦博士、Tarun Kanti Ghosh 博士、瀧川光明博士及び研究室の皆様には多くのご助言をしていただきました。感謝致します。

さらに、日常を楽しくより充実した毎日にくれた友人達 (Tapioca メンバー、物性若手夏の学校メンバー、他) に感謝します。ありがとう。

最後に、大学院進学をはじめ、いつも遠くで応援し、信頼の下にここまで育ててくれた両親に心から感謝します。

A \hat{K} の対称性

A.1 時間反転対称性のある系

$\mu \equiv \mu_{\uparrow} = \mu_{\downarrow}$ ($\Rightarrow n \equiv n_{\uparrow} = n_{\downarrow}$) のとき, 以下が成り立つ.

$$\hat{K}(\mathbf{r}) = -\hat{\tau}_2 \hat{K}^*(\mathbf{r}) \hat{\tau}_2 \quad (41)$$

$\hat{\tau}_2$ は Pauli 行列:

$$\hat{\tau}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

証明:

まず, $n \equiv n_{\uparrow} = n_{\downarrow}$ より,

$$\begin{aligned} K_{\sigma}(\mathbf{r}) + gn_{-\sigma}(\mathbf{r}) &= -\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu_{\sigma} + gn_{-\sigma}(\mathbf{r}) \\ &= -\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + gn(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\equiv \mathcal{K}(\mathbf{r}). \quad (44)$$

となって, σ に依らなくなる. さらに, 実数なので, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$.

式 (41) の右辺を計算してやると,

$$-\hat{\tau}_2 \hat{K}^*(\mathbf{r}) \hat{\tau}_2 = - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{\uparrow}^*(\mathbf{r}) & \Delta^*(\mathbf{r}) \\ \Delta(\mathbf{r}) & -\mathcal{K}_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} &= - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K}^*(\mathbf{r}) & \Delta^*(\mathbf{r}) \\ \Delta(\mathbf{r}) & -\mathcal{K}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -\mathcal{K}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \\ &= \hat{K}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (46)$$

ここで, Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式 (13) は,

$$\hat{K}(\mathbf{r}) \hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\hat{K}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) & -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

よって, $\hat{K}(\mathbf{r})$ の固有状態は以下となる.

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} & \text{for } E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} \\ \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} & \text{for } -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} \end{cases} \quad (49)$$

分解した BdG 方程式の複素共役をとって, 左から $\hat{\tau}_2$ を掛けると,

$$\hat{\tau}_2 \hat{K}^* \hat{\tau}_2 \hat{\tau}_2 \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)*}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} \hat{\tau}_2 \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)*}(\mathbf{r}) \quad (50)$$

$$\hat{K} \left(-i \hat{\tau}_2 \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)*}(\mathbf{r}) \right) = -E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} \left(-i \hat{\tau}_2 \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)*}(\mathbf{r}) \right) \quad (51)$$

$$\hat{K} \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}) = -E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}). \quad (52)$$

式 (50) から 式 (51) へは, 式 (46) を用いた. また,

$$\begin{aligned} -i \hat{\tau}_2 \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)*}(\mathbf{r}) &= -i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

$$= \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}). \quad (54)$$

よって, $\vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r})$ は $\hat{K}(\mathbf{r})$ の固有値 $-E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}$ を持つ固有状態となっている.
ところで, $\vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}$ は $-E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}$ を固有値にもつ固有状態なので,

$$E_{\mathbf{q}} \equiv E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} = E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}. \quad (55)$$

よって $\hat{K}(\mathbf{r})$ の固有状態は以下となる.

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} & \text{for } E_{\mathbf{q}} \\ \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ u_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} & \text{for } -E_{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (56)$$

つまり, 1 つの固有値とそれに対応する固有状態を見つければ, もう一つの固有値はマイナス符号のそれとなる.

\Rightarrow time-reversal symmetry (particle-hole).

A.2 時間反転対称性の無い系

前節で扱った対称性の無い場合, つまり $\mu_\uparrow \neq \mu_\downarrow$ ($n_\uparrow \neq n_\downarrow$) の場合は, $\hat{K}(\mathbf{r})$ の対称性 (41) が無いため, 一般的に $\hat{K}(\mathbf{r})$ の固有状態は以下である.

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} & \text{for } E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} \\ \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -v_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{r}) \\ u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} & \text{for } -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}. \end{cases} \quad (57)$$

ここで,

$$E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} \neq E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} \quad (58)$$

と別のものになる.

\Rightarrow time-reversal symmetry breaking.

よって, BdG 方程式より,

$$\hat{K}(\mathbf{r})\hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} E_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)} \end{bmatrix}, \quad (59)$$

$$\hat{u}_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\uparrow)}(\mathbf{r}) \otimes |\uparrow\rangle + \vec{\varphi}_{\mathbf{q}}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}) \otimes |\downarrow\rangle \quad (60)$$

ということがわかる.

参考文献

- [1] See for review, Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, Phys. Rep. **412**, 1 (2005).
- [2] M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Science **311**, 492 (2006).
- [3] M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle, Nature (London) **442**, 54 (2006).
- [4] Y. Shin, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **97**, 030401 (2006).
- [5] G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y. A. Liao, and R. G. Hulet, Science **311**, 503 (2006).

- [6] K. Machida, T. Mizushima, and M. Ichioka, Phys. Rev. Lett. **97**, 120407 (2006).
- [7] J. Kinnunen, L. M. Jensen, and P. Törmä, Phys. Rev. Lett. **96**, 110403 (2006).
- [8] L. M. Jensen, J. Kinnunen, and P. Törmä, cond-mat/0604424.
- [9] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, Science **292**, 476 (2001).
- [10] P. Engels, I. Coddington, P. C. Haljan, V. Schweikhard, and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **90**, 170405 (2003).
- [11] N. Hayashi, T. Isoshima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **80**, 2921 (1998).
- [12] N. Hayashi, M. Ichioka, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 3368 (1998).
- [13] N. Nygaard, G. M. Bruun, C. W. Clark, and D. L. Feder, Phys. Rev. Lett. **90**, 210402 (2003).
- [14] A. Bulgac and Y. Yu, Phys. Rev. Lett. **91**, 190404 (2003).
- [15] M. Machida and T. Koyama, Phys. Rev. Lett. **94**, 140401 (2005).
- [16] R. Sensarma, M. Randeria, and T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. **96**, 090403 (2006).
- [17] Y. Kawaguchi and T. Ohmi, cond-mat/0411018.
- [18] C. -C. Chien, Y. He, Q. Chen, and K. Levin, Phys. Rev. A **73**, 041603(R) (2006).
- [19] K. Kakuyanagi, M. Saitoh, K. Kumagai, S. Takashima, M. Nohara, H. Takagi, and Y. Matsuda, Phys. Rev. Lett. **94**, 047602 (2005).
- [20] H. A. Radovan, N. A. Fortune, T. P. Murphy, S. T. Hannahs, E. C. Palm, S. W. Tozer, and D. Hall, Nature (London) **425**, 51 (2003).
- [21] A. Bianchi, R. Movshovich, C. Capan, P. G. Pagliuso, and J. L. Sarrao, Phys. Rev. Lett. **91**, 187004 (2003).
- [22] C. Capan, A. Bianchi, R. Movshovich, A. D. Christianson, A. Malinowski, M. F. Hundley, A. Lacerda, P. G. Pagliuso, and J. L. Sarrao, Phys. Rev. B **70**, 134513 (2004).
- [23] See for example, R. Casalbuoni and G. Nardulli, Rev. Mod. Phys. **76**, 263 (2004).

- [24] E. J. Ferrer, V. de la Incera, and C. Manuel, Phys. Rev. Lett. **95**, 152002 (2005).
- [25] K. Iida and G. Baym, Phys. Rev. D **66**, 014015 (2002).
- [26] M. M. Salomaa and G. E. Volvik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987).
- [27] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [28] A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, J. Phys.: Condens. Matter **13**, R135 (2001).
- [29] C. Caroli, P.G. de Gennes, and J. Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).
- [30] F. Gygi and M. Schlüter, Phys. Rev. B **43**, 7609 (1991).
- [31] P. Fulde and R. A. Ferrell, Phys. Rev. **135**, A550 (1964).
- [32] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **20**, 762 (1965).
- [33] The subroutine libraries are available from the ARPACK home page at <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>.
- [34] T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, arXiv:0705.3361.
- [35] M. Takahashi, T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **97**, 180407 (2006).